SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

École Supérieure de Commerce de Paris 1983

Mathématiques III

OPTION ECONOMIQUE

EXERCICE I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1°/ Pour quelles valeurs de a, A est-elle diagonalisable ?

2°/ Déterminer pour n, entier supérieur à 0, la matrice A^n,

α) lorsque $a \neq 0$

β) lorsque $a = 0$

3°/ On dit que la suite de matrices $M_n = \begin{pmatrix} U_n & V_n \\ W_n & T_n \end{pmatrix}$ a pour limite la matrice nulle quand n tend vers $+\infty$ si chacune des suite (U_n), (V_n), (W_n), (T_n) a pour limite 0.

Comment faut-il choisir $a \in \mathbb{R}$ pour que A^n ait pour limite la matrice nulle ?

EXERCICE II

1°/ Prouver pour $0 < a \leqslant 1$, l'existence de l'intégrale

$$I(a) = \int_a^1 \frac{dt}{1-e^{-t^2}}$$

Montrer que, par contre cette intégrale diverge pour a=0;

(On ne cherchera pas à calculer I(a)).

2°/ On considère la fonction f définie sur $]0,\pi[$ par : $f(x) = I(\sin^2 x)$,

a) prouver que f est continue sur $]0,\pi[$

b) prouver que la représentation graphique de f dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à la droite $x = \pi/2$

c) déterminer la dérivée de f; en déduire les variations de f.

d) trouver un équivalent de f au voisinage de $\pi/2$.

EXERCICE III

Deux joueurs A et B jouent à "pile ou face" : la partie est constituée de n lancers consécutifs et indépendants d'une pièce biaisée ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé).

On donne p, la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer de la pièce, avec $0 < p < 1/2$. (la probabilité d'obtenir face est donc $1-p$) .

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de lancers gagnants pour le joueur A. On dit que le jeu est équitable si l'espérance de X est n/2.

1°/ Avant chaque lancer, le joueur A choisit, soit pile avec la probabilité α, soit face avec la probabilité $1-\alpha$ (α donné, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), ses choix successifs étant indépendants les uns des autres.

a) Quelle est pour chacun des lancers la probabilité de gain de A ?

b) quelle est la loi de X ? est-ce une loi connue ? en donner l'espérance E(X) et la variance V(X).

c) pour quelle valeur de α, E(X) est-elle maximale ?

d) peut-on choisir α pour que le jeu soit équitable ?

2°/ On modifie la règle du jeu : le joueur A fait un seul choix, valable pour tous les lancers ; c'est pile (avec la probabilté α) ou face (avec la probabilité $1-\alpha$), (α donné $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$).

a) Quelle est la loi de X ? Calculer E(X).

b) Pour quelle valeur de α, E(X) est-elle maximale ?

c) Peut-on choisir α pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE IV

On désigne par E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables.

Les scalaires a et k étant des réels, on considère les deux applications de E dans E :

$L_a : f \longmapsto L_a(f) = f' + af$

$Q_{a,k} : f \longmapsto Q_{a,k}(f)$, avec pour tout x réel, $\left[Q_{a,k}(f)\right](x) = e^{-ax}\left[k + \int_0^x e^{at} f(t)\,dt\right]$.

1°/ Vérifier que L_a et $Q_{a,k}$ sont à valeurs dans E et montrer que L_a et $Q_{a,0}$ sont des endomorphismes de E.

2°/ Démontrer que, pour tout a et k réels et tout f de E,

$$(L_a \circ Q_{a,k})(f) = f .$$

3°/ Montrer que L_a est surjective et $Q_{a,k}$ injective, pour tout a et k réels.

4°/ Calculer $Q_{1,k}(f)$ lorsque :

α) $f(t) = \sin t$

β) $f(t) = e^{bt}$, $b \in \mathbb{R}$

214